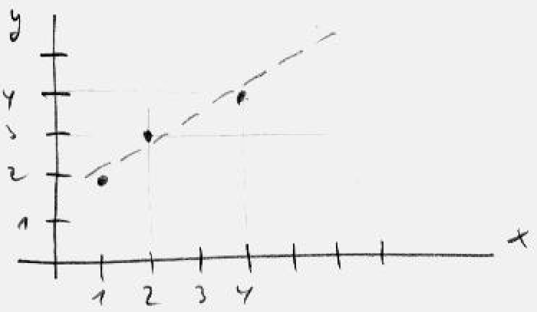
Fehlerquadratminimum (lineare Regression)



x	f(x)
1	2
2	3
4	4

z

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Ansatz

$$y = a \cdot x + b$$
$$2 = a \cdot 1 + b$$
$$3 = a \cdot 2 + b$$
$$4 = a \cdot 4 + b$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}_{b} \neq 0$$

nicht lösbar

deshalb $\underbrace{A^T \cdot A}_{} \cdot z = A^T \cdot b$ lösen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 7 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 21 & 7 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 9 \end{pmatrix}$$ mit Cramer'scher Regel

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 24 & 7 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}}{14} = 0{,}642 \; ; \qquad b = \frac{\begin{vmatrix} 21 & 24 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}}{14} = 1{,}5$$

$$\Rightarrow y = 0{,}624 \cdot x + 1{,}5$$

In Zahlen:

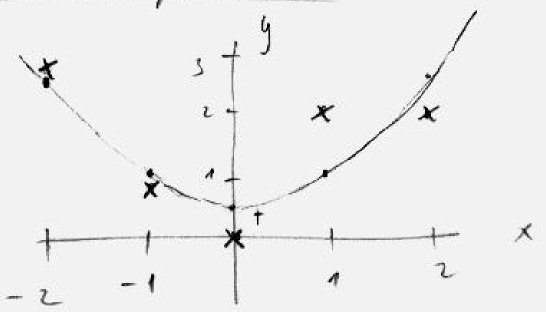
$x = 1 \ldots y = 0{,}642 + 1{,}5 = \underline{2{,}142}$

$x = 2 \quad y = 2 \cdot 0{,}642 + 1{,}5 = \underline{2{,}784}$

$x = 3 \quad y = 3 \cdot 0{,}642 + 1{,}5 = \underline{3{,}426}$

Quadratische Regression

x	$f(x)$
-2	3
-1	1
0	0
1	2
2	2



$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$P(x) = a x^2 + bx + c$

$P(-2) = 3 \qquad 4 \cdot a - 2 \cdot b + c = 3$

$P(-1) = 1 \qquad 1 \cdot a - 1 \cdot b + c = 1$

$P(0) = 0 \qquad 0 \cdot a + 0 \cdot b + c = 0$

$P(1) = 2 \qquad 1 \cdot a + 1 b + c = 2$

$P(2) = 2 \qquad 4 \cdot a + 2b + c = 2$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$A \cdot z = b$ unlösbar

deshalb $A^T \cdot A \cdot z = A^T \cdot b$ lösen

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 34 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^T \cdot b = \begin{pmatrix} 23 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

mit Kramerscher Regel (oder Gauß)

$a = \frac{1}{2} \qquad b = -\frac{1}{10} \qquad c = \frac{3}{5}$

$P(x) = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{10} x + \frac{3}{5}$ (Minimum $x = \frac{1}{10}$)

In Tabelle

$x = -2 \quad y = 2{,}8$

$x = -1 \quad y = 1{,}2$

$x = 0 \quad y = 0{,}6$

$x = 1 \quad y = 1$

$x = 2 \quad y = 2{,}4$

Beispiel Messung von Widerständen:

1. Messung $\quad 1V = 1mA \cdot R$
2. Messung $\quad 2V = 2{,}1mA \cdot R$
3. Messung $\quad 3V = 3mA \cdot R$

Ansatz ohne Konstante, da bei $I = 0$ U sicher 0 ist.

$$\cdot (R) \rightarrow x$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1mA \\ 2{,}1mA \\ 3mA \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1V \\ 2V \\ 3V \end{pmatrix}}_{b}$$

$A \cdot x = b$ ist nicht lösbar.

$A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot b$ lösen

$$\begin{pmatrix} 1mA & 2.1mA & 3mA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1mA \\ 2.1mA \\ 3mA \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1mA & 2{,}1mA & 3mA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1V \\ 2V \\ 3V \end{pmatrix}$$

$$14{,}41 (mA)^2 \cdot R = 14{,}2\ V \cdot \cancel{mA}$$

$$R = \frac{14.2V}{14{,}41mA} = 985{,}42\ \Omega$$